# Interpolación

Planteamiento: Tenemos una función $f(x)$ y se trata de encontrar otra $\phi(x)$, ~~finita~~ perteneciente ~~da~~ a un cierto conjunto, que cumpla ciertas condiciones (características) de $f(x)$

A veces no nos darán $f(x)$ de forma explícita sino solo las condiciones a cumplir por $\phi(x)$ (por ejemplo: valores de $f(x)$ en ciertos ptos $x_0, x_1, \dots, x_n$, de sus derivadas en $x_0$ ($f(x_0)$, $f'(x_0)\dots$), otras veces nos darán $f(x)$ pero es una función "difícil" de manejar y es mejor sustituirla por otra más sencilla que cumpla ciertas características de $f(x)$

En el enunciado de cualquier problema de interpolación tendrán que darnos:

1.- Las condiciones a cumplir por la función interpolante $\phi(x)$, por ejemplo:

- Debe ser igual a $f(x)$ en $(n+1)$ ptos $(x_0, x_1, \dots, x_n)$
- Debe ser igual que $f'(x)$ en $(n+1)$ ptos
- Debe ser igual que $f(x)$ en ciertos ptos y que su derivada $f'(x)$ en los mismos ptos o en otros distintos

2.- El conjunto de donde debemos sacar $\phi(x)$, por ejemplo:

- El espacio de los polinomios de grado $\leq n$, donde $\phi(x) = p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$
- El espacio generado por la base $\{1, x^3, \cosh(x), x^2\cos(x)\}$

En resumen, se interpola porque

- Conocemos explícitamente $f(x)$ pero es "complicado" y preferimos manejar $\phi(x)$ que es "similar" a $f(x)$ pero más sencilla
- No conocemos $f(x)$ sino solo algunas cosas sobre ella y queremos que $\phi(x)$ nos de un conocimiento más allá de lo que sabemos

Ejemplos:

1.- Conocidos $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=4$
Encontrar el polinomio de grado 2 que interpola a $f(x)$ en los ptos dados

$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \in \mathbb{P}_2$ generado por la base $\{1, x, x^2\}$

Para determinar $c_0, c_1, c_2$ imponemos las condiciones a cumplir por $p(x)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= f(0) = p(0) = c_0 \\ 1 &= f(1) = p(1) = c_0 + c_1 + c_2 \\ 4 &= f(2) = p(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 \end{aligned}\right\}$$ sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas $c_0, c_1, c_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz del sistema anterior

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$$ Existe y es única la solución del sistema

Resolviendo: $p(x) = x^2$

2.- Estudiar la existencia y unicidad del problema de hallar el polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2$ que dada una función $f(x)$ cumple

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p'(x_2) = f(x_2)$$

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$
$$p'(x) = c_1 + 2c_2 x$$

Por tanto:

$$p(x_0) = f(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2$$
$$p(x_1) = f(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2$$
$$p'(x_2) = f'(x_2) = c_1 + 2c_2 x_2$$

Sistema a resolver en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f'_2 \end{pmatrix}$$

Determinante de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 \end{vmatrix} = (x_0 - x_1)(2x_2 - x_1 - x_0)$$

que se anula en los siguientes casos:

- $x_0 = x_1$
- $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$

¿Qué implica que el determinante se anule?

- Si $x_0 = x_1 \Rightarrow f(x_0) = f(x_1) \Rightarrow$ Nos están dando en realidad 2 ecuaciones (condiciones) para obtener 3 incógnitas
- Si $x_2 = \dfrac{x_1 + x_0}{2} \Rightarrow p'(x_2)$ se puede calcular a partir de $p(x_0)$ y $p(x_1) \Rightarrow$ La 3ª ec. sería combinación lineal de las otras dos $\Rightarrow$ Nos están dando en realidad 2 condiciones para obtener 3 incógnitas

Un determinante es nulo si sus filas son iguales o combinación lineal unas de otras. Aquí cada fila de la matriz viene de una condición, por tanto, determinante nulo significa que hay condiciones iguales o se pueden obtener unas de otras

## Interpolación polinómica clásica

- Datos: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ que son los valores de la función en $(n+1)$ ptos $x_0, x_1, \dots, x_n$
  En forma de tabla

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
| $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | | $f(x_n)$ |

- Función interpolante: polinomio de grado $\leq n$

Construcción de $p(x)$

1. $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$

   Imponemos las condiciones a cumplir

$$\left.\begin{array}{l} p(x_0) = f(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n \\ p(x_1) = f(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_1^n \\ \vdots \\ p(x_n) = f(x_n) = c_0 + c_1 x_n + \dots + c_n x_n^n \end{array}\right\}$$

Sistema lineal de $(n+1)$ ecuaciones y $(n+1)$ incógnitas

   En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

   El determinante de la matriz del sistema es no nulo siempre que los $x_i$ sean todos distintos $\Rightarrow$ siempre existirá el polinomio interpolador y será único cuando los $x_i$ sean todos distintos $(i = 0, \dots, n)$

2. Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolador

$$p(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + \dots + f(x_n)\ell_n(x)$$

siendo:

$$l_i(x) = \begin{cases} \bullet \text{ polinomio de grado } n \\ \bullet\ l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{para } i=j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \end{cases}$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$B = \{ l_0(x), l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x) \}$ se denomina base de Lagrange

Ejemplo: Calcular el polinomio de menor grado que interpola los siguientes datos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | 0 | 1 | 5 |

Datos: 3 valores $y_i$ (de la función) en 3 ptos $x_i$ distintos $\Rightarrow$ Podemos determinar un único polinomio de grado $\leq 2$

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = 0 \cdot l_0(x) + 1 \cdot l_1(x) + 5\, l_2(x)$$

donde $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ deben cumplir:

| | | |
|---|---|---|
| $l_0(0)=1$ | $l_1(0)=0$ | $l_2(0)=0$ |
| $l_0(1)=0$ | $l_1(1)=1$ | $l_2(1)=0$ |
| $l_0(2)=0$ | $l_1(2)=0$ | $l_2(2)=1$ |

y cada una de ellas debe ser un polinomio de grado 2

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Por tanto

$$p(x) = -x(x-2) + 5 \cdot \frac{1}{2} x(x-1)$$

¿Qué sucede si después de calcular el polinomio interpolador con los datos $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ por la fórmula de Lagrange nos dan un dato adicional $f(x_{n+1})$?

La respuesta es que hay que volver hacer los cálculos porque ahora

$$p(x) = f(x_0)\ell_0(x) + \dots + f(x_n)\ell_n(x) + f(x_{n+1})\ell_{n+1}(x)$$

y todas las ~~...~~ $\ell_i(x)$ son ahora diferentes

Esto no sucede si utilizamos:

3.- <u>Fórmula de Newton</u> para el polinomio interpolador

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Donde

- $f[x_0] = f(x_0)$
- $f[x_0,x_1,\dots,x_k] = f[$ cualquier permutación de los $x_i ]$
- $f[x_0,x_1,\dots,x_k] = \dfrac{f[x_1,\dots,x_k] - f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$ de

aquí el nombre de diferencias divididas

Retomamos el problema planteado anteriormente

- Conocemos $p_{n-1}(x)$ polinomio interpolante de $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$
- Buscamos $p_n(x)$ polinomio interpolante de $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n)$

El polinomio $p_n(x)$ será de la forma:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + A(x)$$

donde $A(x)$ tendrá que ser:

- un polinomio de grado $n$ ($p_{n-1}(x)$ es de grado $(n-1)$) que se anule en $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ para no stropear lo hecho por $p_{n-1}(x)$

$$A(x) = B(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

- y se tiene que cumplir

$$p_n(x_n) = f(x_n) = p_{n-1}(x_n) + A(x_n)$$

con lo que

$$B = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})}$$

sustituyendo

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

$$= p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

El proceso para construir el polinomio interpolador por la fórmula de Newton es:

- Dado $(x_0, f(x_0))$, el polinomio que pasa por dicho pto es

$$p_0(x) = f[x_0]$$

- Añadimos $(x_1, f(x_1))$

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) =$$

$$= f[x_0] + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= p_0(x) + \frac{f(x_1) - p_0(x)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$(p_0(x) = f[x_0]$ por el paso anterior$)$

- Hasta llegar a

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

¿Cómo se calculan las diferencias divididas?
Mediante la tabla

$$\begin{array}{lllll} f[x_0] & & & & \\ & f[x_0,x_1] & & & \\ f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\ & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \cdots \\ f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & & \\ & f[x_2,x_3] & & \vdots & \\ f[x_3] & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

Los coeficientes que van apareciendo en la parte superior del triángulo son justamente los usados en la fórmula de Newton.
Hemos pasado de unos coeficientes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ adecuados para encontrar el polinomio interpolador de Lagrange a otros $f[x_0], f[x_0,x_1], \ldots, f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ para encontrar el polinomio interpolador con la fórmula de Newton. En realidad, lo que hemos hecho es un cambio de base.

Ejemplo: Dada la tabla

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 0 | 0 | 2 | 8 |

1. Calcular el polinomio interpolador en los ptos $(0, 1, 2)$
2. Calcular el polinomio interpolador en los ptos $(0, 1, 2, 4)$

Solución

1. $p(t) = f[0] + f[0,1](t-0) + f[0,1,2](t-0)(t-1)$
2. $p(t) =$ polinomio anterior $+ f[0,1,2,4](t-0)(t-1)\cdot(t-2)$

| $t_k$ | $f(t_k)$ | $f[\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| | | $f[0,1]=0$ | | |
| 1 | 0 | | $f[0,1,2]=1$ | |
| | | $f[1,2]=2$ | | $f[0,1,2,4]=-1/6$ |
| 2 | 2 | | $f[1,2,4]=\frac{1}{3}$ | |
| | | $f[2,4]=3$ | | |
| 4 | 8 | | | |

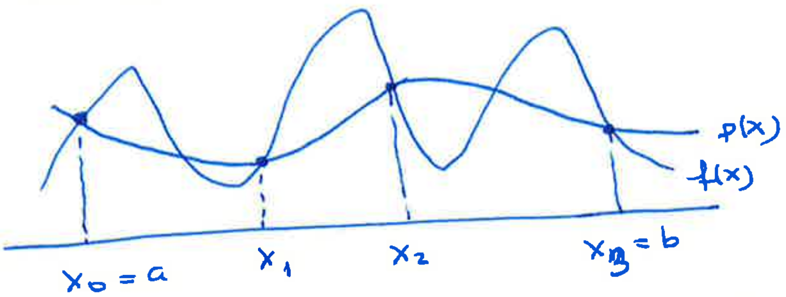
Por tanto :

1.- $p(t) = 0 + 0\cdot(t-0) + 1\cdot(t-0)(t-1)$

2.- $p(t) = 0 + 0\,(t-0) + 1\cdot(t-0)(t-1) - \frac{1}{6}(t-0)(t-1)(t-2)$

## Error de interpolación y su acotación

$p(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$




$$|e(x)| = |f(x) - p(x)| \qquad (|e(x_i)| = 0)$$

**Teorema**

$$|e(x)| = |f(x) - p(x)| = \left| f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

**Teorema**

Si $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ y $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ son $(n+2)$ ptos distintos de $[a,b]$

$$|e(x)| = \left| \frac{f^{(n+1}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| ; \quad \xi_x \in [a,b]$$

Si $|f^{(n+1}(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$

$$\boxed{|e(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|}$$

Ejemplo : Acotar el error que se produce al sustituir $f(x)=\cos x$ por su polinomio interpolador en $x_0=0$ y $x_1=1'2$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$|f''(x)| = |-\cos x| \leq 1 = M \ \forall x$ y en particular para $x \in [0,1'2]$

$$|e(x)| \leq \frac{M}{2!} \max |(x-0)(x-1'2)|$$

$$\max_{x\in[x_0,x_1]} |(x-0)(x-1'2)| = \left(\frac{1'2-0}{2}\right)^2$$

$$|e(x)| \leq \frac{1}{2!} \cdot 0'36 = 0'18$$

## Interpolación polinomial de Hermite

Datos : $f(x_0), f'(x_0), f(x_1), f'(x_1), \ldots, f(x_n)\ f'(x_n)$

con $(2n+2) = 2(n+1)$ datos podemos determinar un polinomio interpolador de grado $2n+1$

Diferencias divididas con puntos coincidentes :

Si $f(x) \in C^n[a,b]$

$$f[x_0,x_0] = f'(x_0)$$

$$f[x_0,x_0,x_0] = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0,x_0,\ldots,x_0] = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

Para calcular el polinomio interpolador de Hermite se forma la tabla de diferencias divididas generalizadas y se aplica la fórmula para el polinomio interpolador de Newton

| $x_k$ | $f[x_k]$ | $f[\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ | .... |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0]$ | | | |
| | | $f[x_0,x_0]=f'(x_0)$ | | |
| $x_0$ | $f[x_0]$ | | $f[x_0,x_0,x_1]$ | |
| | | $f[x_0,x_1]$ | | |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | | $f[x_0,x_1,x_1]$ | |
| | | $f[x_1,x_1]=f'(x_1)$ | | |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | | $f[x_1,x_1,x_2]$ | |
| | | $f[x_1,x_2]$ | | |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | | $f[x_1,x_2,x_2]$ | |
| | | $f[x_2,x_2]=f'(x_2)$ | | |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | | | |
| $\vdots$ | | | | |

Polinomio interpolador de Hermite

$$p(x)=f[x_0]+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)+\dots+f[x_0,x_0,x_1,x_1,\dots,x_n,x_n](x-x_0)^2(x-x_1)^2\dots(x-x_n)$$

## Error en la interpolación de Hermite y su acotación

$$|e(x)|=|f(x)-p(x)|=\left|f[x_0,x_0,x_1,x_1,\dots,x_n,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\right|$$

Si $f\in C^{2n+2}[a,b]$

$$|e(x)|\le\frac{M}{(2n+2)!}\max_{[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\right|$$

siendo $|f^{(2n+2}(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]$ al que pertenecen los ptos $x_0,\dots,x_n$ donde se conocen los datos

Ejemplo: Calcular el polinomio de Hermite que interpola los datos de la función $f(x)=\ln(x)$:

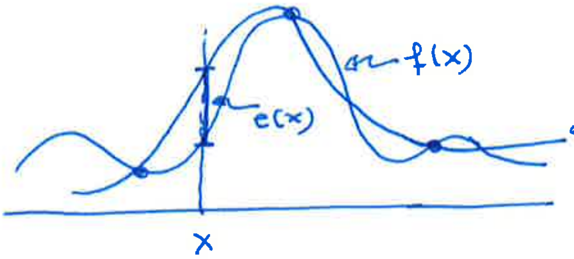
$f(1)=0$, $f'(1)=1$ ; $f(2)=\ln 2$ y $f'(2)=\frac{1}{2}$

| $x_k$ | $f[x_k]$ | $f[\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | |
| | | $f[1,1]=f'(1)=1$ | | |
| 1 | 0 | | $f[1,1,2]=\ln 2-1$ | |
| | | $f[1,2]=\ln 2$ | | $f[1,1,2,2]=\frac{3}{2}-2\ln 2$ |
| 2 | $\ln 2$ | | $f[1,2,2]=\frac{1}{2}-\ln 2$ | |
| | | $f[2,2]=f'(2)=\frac{1}{2}$ | | |
| 2 | $\ln 2$ | | | |

Polinomio de Hermite

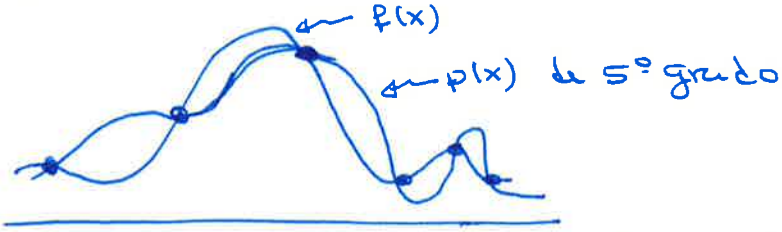
$$p(x)=0+1\cdot(x-1)+(\ln 2-1)(x-1)^2+\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)(x-1)^2(x-2)$$

# Interpolación polinomial a trozos : Funciones spline

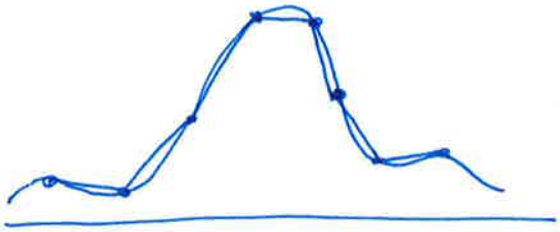



p(x) de 2º grado que interpola a f(x)

Si pensamos disminuir el error aumentando el grado del polinomio interpolador




Vemos que el polinomio empieza a ser tan "difícil de manejar" como la función



Interpolación lineal a trozos de la función $\Rightarrow$ Disminución del error

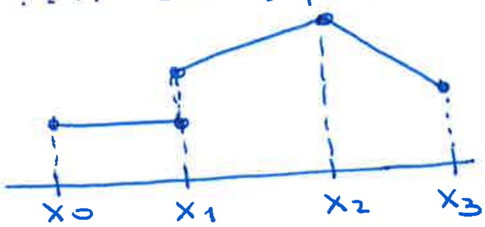
## Funciones spline

Son polinomios a trozos con condiciones de continuidad

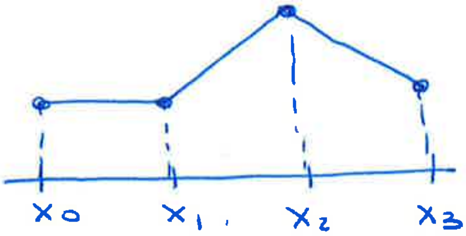
Dado un intervalo $[a,b]$ y una partición $\Delta$ del mismo por los ptos $\{a=x_0, x_1, \dots, x_n=b\}$:

1.- spline de grado 1 sobre $\Delta$ $(= s(x))$

- $s(x)$ es un polinomio de grado 1 ~~para cada~~ en $[x_i, x_{i+1}]$
- $s(x)$ es una función continua en $[a,b]$ $(s(x) \in C^0[a,b]) \Rightarrow s(x_1^-) = s(x_1^+)$; $s(x_2^-) = s(x_2^+)$ .... en los ptos/nodos interiores de la partición




No es un spline de grado 1 porque $s(x_1^-) \neq s(x_1^+)$




Si s un spline de grado 1

Ejemplo: Calcular el spline de grado 1 en $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ que interpole la tabla

| | | |
|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| 0 | h | 0 |

$$s(x) = \begin{cases} ax + b; & x \in [-1, 0] \\ Ax + B; & x \in [0, 1] \end{cases}$$

- $s(x)$ tiene que interpolar la tabla

$$s(-1) = 0 = a(-1) + b$$
$$s(0) = h = a \cdot h + b$$
$$s(1) = 0 = A \cdot 1 + B$$

- $s(x)$ tiene que ser continua en $[-1, 1]$, es decir

$$s(0^-) = s(0^+) \Rightarrow$$

$$b = B$$

Tenemos así 4 ecuaciones para determinar a, b, A y B

Resolviendo:

$$s(x) = \begin{cases} h(x+1); & x \in [-1, 0] \\ h(1-x); & x \in [0, 1] \end{cases}$$

2. <u>Spline de grado 2</u> sobre $\Delta$ $(= s(x))$

- $s(x)$ es un polinomio de grado 2 para cada $[x_i, x_{i+1}]$
- $s(x) \in C^1[a, b]$, lo que implica que se debe cumplir $\begin{cases} s(x_i^-) = s(x_i^+) \\ s'(x_i^-) = s'(x_i^+) \end{cases}$ en los nodos/ptos interiores

Ejemplo: Calcular el spline cuadrático $s(x)$ que interpola la tabla

| $x_k$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y_k$ | $1$ | $1$ | $4$ |

con la condición adicional $s'(-1)=3$

$$s(x)=\begin{cases} a x^2+bx+c & ; x\in[-1,0] \\ A x^2+Bx+C & ; x\in[0,1] \end{cases}$$

- $s(x)$ tiene que interpolar la tabla

$$\left.\begin{array}{l} s(-1)=1 = a(-1)^2+b(-1)+c \\ s(0)=1 = c \\ s(1)=4 = A\cdot 1+B\cdot 1+C \end{array}\right\}$$

- $s(x)$ tiene que pertenecer a la clase de funciones $C^1[a,b]$

$$s(0^-)=s(0^+)$$

$$s'(0^-)=s'(0^+)$$

$$s'(x)=\begin{cases} 2ax+b & ; x\in[-1,0] \\ 2Ax+B & ; x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} s(0^-)=s(0^+) \Rightarrow c=C \\ s'(0^-)=s'(0^+) \Rightarrow b=B \end{array}\right\}$$

Para calcular $s(x)$ tenemos que calcular $a, b, c, A, B, C$ y hasta ahora sólo tenemos $5 \Rightarrow$ Necesitamos una condición adicional que en este caso es $s'(-1)=3$

$$s'(-1)=3 = +2a(-1)+b$$

Reuniendo todas las ecuaciones, tenemos el sistema:

$$
\left.\begin{array}{l}
1 = a - b + c \\
c = 1 \\
4 = A + B + C \\
c = C \\
b = B \\
3 = -2a + b
\end{array}\right\}
\qquad
\begin{array}{l}
a = b = -3 = B \\
c = 1 = C \\
A = 6
\end{array}
$$

$$
s(x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x + 1 \ ; & x \in [-1, 0] \\ 6x^2 - 3x + 1 \ ; & x \in [0, 1] \end{cases}
$$